ゲーム理論

0　ゲーム理論とは何か

■ルーレットやサイコロなどの賭博は偶然性のみが支配するので、この場合は確率で考えることができる

■では相手が人間だったらどうなるのか、人の意志が介在する場合の戦略・戦術を考えることが「ゲーム理論」である

■難しく言えば、必ずしも利害の一致しない複数の主体が存在し，各主体の意思決定が他の主体の意思決定に影響を与える状況における，意思決定を分析する数理的な方法のこと

■主体が自らの利益を最大化するという意味での合理的な決定を問題とする

■ゲーム理論が分析対象とする状況は，家事の分担，市場競争，予算の分配，訴訟，政策決定，条約締結など，個人間から国家間まであらゆる場面に存在する

■ゲーム理論の応用は，いわゆる社会科学的分野に限らず，生物進化，通信ネットワーク，機械の制御などにも及ぶ

1　ゲームの主な構成要素

プレイヤー

　ゲーム(意思決定)を行う主体

　個人，企業，国家，…

戦略

　行動の選択

　じゃんけん…グー，チョキ，パー

　商品の価格競争…価格設定

利得

　プレイヤーが戦略を選択した結果に対する各プレイヤーの評価値

　主観的満足度，利益，…

2　ゲームの分類

プレイヤーの提携の有無

非協力ゲーム

プレイヤー個人が構成単位で,他のプレイヤーと提携することなく戦略を選択するゲーム

協力ゲーム

3 人以上のプレイヤーがゲームを行う時に，プレイヤー同士で提携を行うゲーム

3　ゲームの分類

行動のタイミング，繰り返し

標準型ゲーム(戦略型ゲーム)

じゃんけんのように，ゲームを行うすべてのプレイヤーが同時に行動するゲーム

展開型ゲーム

チェスのように，各プレイヤーが順番に行動するゲーム

繰り返しゲーム

同じゲームを何度も繰り返すゲーム

4　ゲームの分類

プレイヤーに与えられる情報

完備情報ゲーム/不完備情報ゲーム

各プレイヤーの利得をすべてのプレイヤーが知っているゲーム

/そうではないゲーム

完全情報ゲーム/不完全情報ゲーム

展開型ゲームにおいて，各プレイヤーのこれまでの行動や状態の履歴をプレイヤーがすべて知っているゲーム

/そうではないゲーム

5　支配戦略

A 社と B 社は，回線の品質向上ないしは回線使用料の値下げを検討

次期の利益増加見込み(単位は億円)…利得行列

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(20, 20)	(10, 40)
	料金値下げ	(40, 10)	(30, 30)

※( )内数字は（A 社,B 社）の順で各社の利益増加見込み額である

【問題１】　自社の利益増加を最大にするために各社がとるべき戦略は？

あなたが A 社の社長だったらどうするか

あなたが B 社の社長だったらどうするか

6　戦略の検討

①　A 社の立場から考える

B 社が品質向上戦略を選択したと仮定する時

× A 社　品質向上…20 億円利益増加

○ A 社　料金値下げ…40 億円利益増加

＜検討結果＞

B 社が品質向上を選択したなら，A 社は料金値下げを選択したほうが利得は大きくなる．したがって，この場合，A 社は料金値下げを選択するべきである．

B 社が料金値下げ戦略を選択したと仮定する時

× A 社　品質向上…10 億円利益増加

○ A 社　料金値下げ…30 億円利益増加

＜検討結果＞

B 社が料金値下げを選択したなら, A 社は料金値下げを選択したほうが利得は大きくなる．したがって，この場合，A 社は料金値下げを選択するべきである．

＜結論＞

B 社の戦略に関わらず，A 社は料金値下げ戦略を選択すべきである。

　このように他のプレイヤーの戦略に関わらず，自分の戦略で他の戦略に対して絶対的に優位な戦略を,「支配戦略」という。すなわち，A 社にとって,「料金値下げ」は支配戦略となる。

②　B 社の立場から考える

＜結論＞

同様に、A 社の戦略に関わらず，B 社は料金値下げ戦略を選択すべき…となる。

③　ゲームの解

結局，両者とも相手の戦略に関わらず，料金値下げを選択すべきという結論に至る。この場合は、相手の戦略に関わらず，自分の利得を最大にする戦略が決まったが，すべてのゲームに支配戦略が存在する訳ではない。

7　支配戦略が存在しない場合

A 社と B 社は，回線の品質向上ないしは回線使用料の値下げを検討

次期の利益増加見込み(単位は億円)…利得行列

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

※( )内数字は（A 社,B 社）の順で各社の利益増加見込み額である

【問題２】　自社の利益増加を最大にするために各社がとるべき戦略は？

あなたが A 社の社長だったらどうするか

あなたが B 社の社長だったらどうするか

8　戦略の検討　その2

①　A 社の立場から考える

B 社が品質向上戦略を選択したと仮定する時

× A 社　品質向上…40 億円利益増加

○ A 社　料金値下げ…50 億円利益増加

＜検討結果＞

B 社が品質向上を選択したなら，A 社は料金値下げを選択したほうが利得は大きくなる．したがって，この場合，A 社は料金値下げを選択するべきである．

B 社が料金値下げ戦略を選択したと仮定する時

○ A 社　品質向上…30 億円利益増加

× A 社　料金値下げ…20 億円利益増加

＜検討結果＞

B 社が品質向上戦略を選択する時　➡　A 社　料金値下げ…50 億円利益増加

B 社が料金値下げ戦略を選択する時　➡　A 社　品質向上…30 億円利益増加

A 社には支配戦略が存在せず，A 社の最良の選択は B 社の選択に依存する。

②　B 社の立場から考える

A 社が品質向上戦略を選択したと仮定する時

× B 社　品質向上…45 億円利益増加

○ B 社　料金値下げ…50 億円利益増加

＜検討結果＞

A 社が品質向上を選択したなら，B 社は料金値下げを選択したほうが利得は大きくなる．したがって，この場合，B 社は料金値下げを選択するべきである．

A 社が料金値下げ戦略を選択したと仮定する時

○ B 社　品質向上…35 億円利益増加

× B 社　料金値下げ…25 億円利益増加

＜検討結果＞

A 社が品質向上戦略を選択する時　➡　B 社　料金値下げ…50 億円利益増加

A 社が料金値下げ戦略を選択する時　➡　B 社　品質向上…35 億円利益増加

B 社にも支配戦略が存在せず，B 社の最良の選択は A 社の選択に依存する。

9　最適反応戦略とナッシュ均衡解

相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略

…相手の戦略に対する最適反応戦略

※　A 社が品質向上を選択するとした時，B 社が自社の利得を最大にするために選択すべき戦略のこと

各プレイヤーのとる戦略が互いに相手の戦略に対する 最適反応戦略 となる組み合わせ

…ナッシュ均衡解

「自分がその戦略から他の戦略に変更しても，利得を大きくできないような戦略の組み合わせ」のこと

ナッシュ均衡解ではないケース

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

B 社が料金値下げに戦略変更

A 社　品質向上(40)　　　品質向上(30)

B 社　品質向上(**45**)　➡　料金値下げ(**50**)　← B 社にとって、最適反応戦略 といえる

B 社は戦略を変更して利得を大きくできた！

… つまり、戦略変更前の両社ともに(品質向上，品質向上)はナッシュ均衡解ではない

A 社が料金値下げに戦略変更

A 社　品質向上(**40**)　➡　料金値下げ(**50**)

B 社　品質向上(45)　　　品質向上(35)　← A 社にとって、最適反応戦略 といえる

A 社は戦略を変更して利得を大きくできた！

… つまり、戦略変更前の両社ともに(品質向上，品質向上)はナッシュ均衡解ではない

10　ナッシュ均衡解

①B 社の社長・・・「もっと利益を上げたいが、品質向上をして顧客獲得するか・・・」

A 社　品質向上(30)
B 社　料金値下げ(50)　　➡　　品質向上(45)　← B 社にとって、利得が減るので、
こんな戦術の変更はできないな！

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

②A 社の社長・・・「B 社に負けているので、こちらも料金値下げして巻き返したいが・・・」

A 社　品質向上(30)　　➡　　料金値下げ(20)　← A 社にとってはさらに利得が減るので、
B 社　料金値下げ(50)　　　　　　　　　　こんな戦術の変更はできないな！

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

③検討

結局、A 社が品質向上、B 社が料金値下げを選択している場合、A 社も B 社も自分が戦略を変更するだけでは利得を増やすことができない。

つまり、「A 社が品質向上、B 社が料金値下げ」は、「自分がその戦略から他の戦略に変更しても利得を大きくできないような戦略の組み合わせ」となっている。

すなわち，「A 社が品質向上，B 社が料金値下げ」はこのゲームにおける**ナッシュ均衡解**

11　さらなる検討

①B 社の社長・・・「A 社のように料金値下げして、もっと顧客獲得したい・・・」

A 社 料金値下げ(30)

B 社 品質向上(50)　　➡　　料金値下げ(25)　← B 社にとって、利得が減るので、

こんな戦術の変更はできるわけない！

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

②A 社の社長・・・「B 社に負けているので、こちらは品質向上させて巻き返したいが・・・」

A 社 料金値下げ(50)　　➡　　料金値下げ(40)　← A 社にとっては利得が 10 億減るので、

B 社 品質向上(35)　　こんな戦術の変更はできないな！

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

③検討

結局、A 社が料金値下げ、B 社が品質向上を選択している場合、A 社も B 社も自分が戦略を変更するだけでは利得を増やすことができない。

つまり、「A 社が料金値下げ、B 社が品質向上」は、「自分がその戦略から他の戦略に変更しても利得を大きくできないような戦略の組み合わせ」となっている。

「A 社が料金値下げ，B 社が品質向上」も、このゲームにおける**ナッシュ均衡解**である

12　ナッシュ均衡解のまとめ

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">B 社</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>品質向上</td><td>料金値下げ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A 社</td><td>品質向上</td><td>(40, 45)</td><td>(30, 50)</td></tr>
<tr><td>料金値下げ</td><td>(50, 35)</td><td>(20, 25)</td></tr>
</table>

・上の例のように、ナッシュ均衡解は複数存在することがある。
・B 社は、A 社が品質向上、B 社が料金値下げで、B 社の利得が 50 億円になることを望む。
・一方、A 社は、A 社が料金値下げ、B 社が品質向上で、A 社の利得が 50 億円になることを望む。
・両社とも、自社が料金値下げ、他社が品質向上となって欲しいが、両社の希望は両立しない。
・この場合、一方が先に料金値下げを発表すれば、他方は品質向上を選択せざるを得ないので、現実には先手必勝となる。しかし、料金値下げの発表が同時の場合、両社にとって最悪の結果になる。
・ナッシュ均衡解は、支配戦略がない場合でも、どの戦略をとるべきかを示してくれる。
・ただし、上の例のように、ナッシュ均衡解が複数ある場合は、難しい問題が残ることがある。

13　最適反応が果てしなく続くゲーム

（例題）A 社が品質向上，B 社が料金値下げを選択した状態で，A 社の利得は 40 億円，B 社の利得は 20 億円である。

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">B 社</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>品質向上</td><td>料金値下げ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A 社</td><td>品質向上</td><td>(25, 35)</td><td>(40, 20)</td></tr>
<tr><td>料金値下げ</td><td>(30, 20)</td><td>(20, 40)</td></tr>
</table>

（１）上記の状態で B 社が最適反応戦略をとった場合、どうなるか。

（２）B 社の最適反応戦略を見た A 社は、どうすべきか。

（３）A 社の反応後に B 社はどうするべきか。また、ナッシュ均衡解は何か。

14　グーとパーだけのじゃんけん（混合戦略）

ＡとＢの２人がじゃんけんをする。ただし、お互いにグーとパーしか出せない。

２人は自分の意志でグーまたはパーを出し、それぞれの場合の得点を表１のように定める。

100 回勝負した時の合計得点で競うとき、勝者は A と B のどちらになるか。

表1

A	B	A	B
グー	グー	0	6
グー	パー	3	0
パー	グー	3	0
パー	パー	0	1

10　最適反応が無限に続くゲームへのアプローチ＝確率的に戦略を選択する

Ａがグーを出す確率をｘ（０≦ｘ≦１）、Ｂがグーを出す確率をｙ（０≦ｙ≦１）とする。１回のじゃんけんにおけるＡの得点期待値をα、Ｂの得点期待値をβとすると、

α＝０×Ａ・Ｂともグーを出す確率＋３×Ａがグー・Ｂがパーの確率＋３×Ａがパー・Ｂがグーの確率＋０×Ａがパー・Ｂがパーの確率

＝３×ｘ×（１－ｙ）＋３×（１－ｘ）×ｙ

β＝６×Ａ・Ｂともグーを出す確率＋０×Ａがグー・Ｂがパーの確率＋０×Ａがパー・Ｂがグーの確率＋１×Ａがパー・Ｂがパーの確率

＝６×ｘ×ｙ＋１×（１―ｘ）×（１―ｙ）

である。ここでα＝β、すなわちＡとＢが互角になる状況について考える。式を変形していくと、以下のようになる。

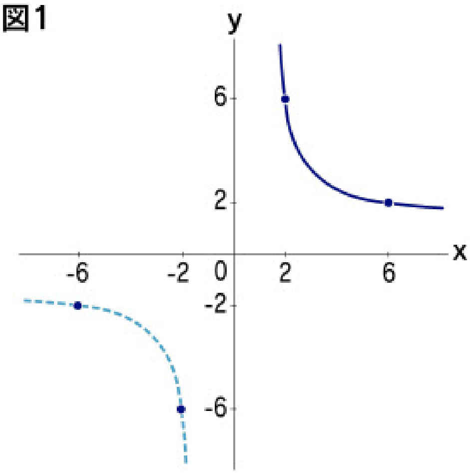
$$3x(1-y)+3(1-x)y=6xy+(1-x)(1-y)$$
$$3x-3xy+3y-3xy=6xy+1-x-y+xy$$
$$13xy-4x-4y+1=0$$
$$xy-\frac{4}{13}x-\frac{4}{13}y+\frac{1}{13}=0$$
$$\left(x-\frac{4}{13}\right)\left(y-\frac{4}{13}\right)=\frac{16-13}{169}=\frac{3}{169}$$

ここで復習であるが、面積 12 平方センチの長方形について、たてをｘcm、横をｙcm とすると、

ｘｙ＝12

という式が成り立つ。これはｘとｙが反比例していることを示し、ｘとｙが正の範囲でそのグラフを描くと、図１のような双曲線になる。

図1



そこで、表１から導いた式

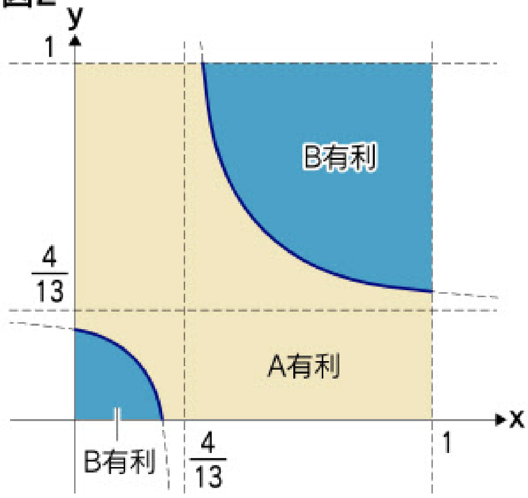
$$\left(x-\frac{4}{13}\right)\left(y-\frac{4}{13}\right)=\frac{3}{169}$$

のグラフは、ｘｙ座標平面上で

$$xy=\frac{3}{169}$$

のグラフをｘ軸の正の方向に 4/13、ｙ軸の正の方向に 4/13、それぞれ平行移動させた図２のような双曲線になる。ここで、確率は０以上１以下であるから、０≦ｘ≦１、０≦ｙ≦１となる。

図2



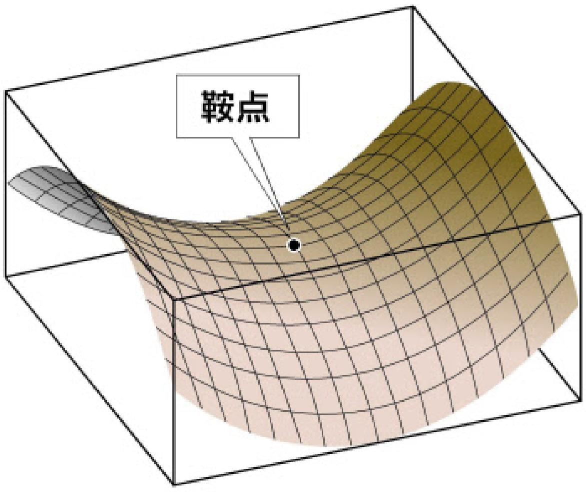
グラフを説明すると、４点（０、０）（１、０）（１、１）（０、１）で囲まれた正方形の部分において、ＡとＢが互角になるのは双曲線上、ということである。

ここで、点（１、０）（０、１）が何を意味するか考えよう。表２の２段目と３段目のケースだ。明らかにＡが有利である。一方、点（０、０）（１、１）は表 ２の１段目と４段目に当たり、Ｂが有利である。それゆえ、双曲線に挟まれた部分ではＡが有利となり、双曲線の外側ではＢが有利となる。

とくにｘ＝4/13 において、すなわちＡが確率 4/13 でグーを出すときは、つねにＡが有利なのである。必ず勝つというわけではないが、このゲームはＡが有利なものであることを意味している。

なお、グラフ上の点（4/13、4/13）はゲーム理論で「鞍点（あんてん）」という重要な点である。

次の図のように、グラフにすると馬具の鞍（くら）のように見えることから、この名が付いた。ゲーム理論では、双方の思惑が均衡するような点を指す。



ここで、表１のゲームを本質的な意味が変わらないように変形する。ＡをＸに、ＢをＹにそれぞれ取り替えて（確率のｘとｙは同じ）、得点は表２のようにＹからＸへ与えるゲームとする。

表2

X	Y	与える点
グー	グー	-6
グー	パー	3
パー	グー	3
パー	パー	-1

表２で、－６点をＹからＸに与えることは、Ｙの持ち点は６点上がり、Ｘの持ち点は６点下がることになる。得点差は 12 になる。また、３点をＹからＸに与えることは、Ｙの持ち点は３点下がり、Ｘの持ち点は３点上がることになる。得点差は６になる。

その結果、グーとグー、グーとパー、パーとグー、パーとパーそれぞれの手が出た後の得点差はすべて、表２は表１の２倍になるだけであり、本質的には同じゲームである。

さらに、表２を一般化させて与える点を表３の変数にしてみる。

表3

X	Y	与える点
グー	グー	a11
グー	パー	a12
パー	グー	a21
パー	パー	a22

一般式に置き換えると、次の４式が成り立つ。

［ＸがグーをＹ選択するときのＹからＸへ与える点の期待値ｗ］

$$w = a_{11}y + a_{12}(1-y) = -6y - 3y + 3 = -9y + 3 \cdots\cdots(1)$$

［Ｘがパーを選択するときのＹからＸへ与える点の期待値ｗ］

$$w = a_{21}y + a_{22}(1-y) = 3y + (-1)(1-y) = 4y - 1 \cdots\cdots(2)$$

［Ｙがグーを選択するときのＹからＸへ与える点の期待値ｚ］

$$z = a_{11}x + a_{21}(1-x) = -6x + 3(1-x) = -9x + 3 \cdots\cdots(3)$$

［Ｙがパーを選択するときのＹからＸへ与える点の期待値ｚ］

$$z = a_{12}x + a_{22}(1-x) = 3x + (-1)(1-x) = 4x - 1 \cdots\cdots(4)$$

さて、ＸはＹから与えられる点を多くしたいのであり、ＹはＸへ与える点を少なくしたいのである。そこでＸは、Ｙがグーとパーのどちらを選択しても、その両方を満たす状況でｚが最大になるようにｘを定めたいとする（ゲームでの行動基準）。これは（３）と（４）から、

$$\begin{cases} z \leqq -9x + 3 \\ z \leqq 4x - 1 \end{cases}$$

を満たす範囲でｚが最大になるｘを定めればよい。そこで、図３より、ｘ＝4/13 のとき、ｚは最大3/13 になる。

　一方、ＹはＸがグーとパーのどちらを選択しても、その両方を満たす状況でｗが最小になるようにｙを定めたい（ゲームでの行動基準）。これは（１）と（２）から、

$$\begin{cases} w \geqq -9y + 3 \\ w \geqq 4y - 1 \end{cases}$$

を満たす範囲でｗが最小になるｙを定めればよい。そこで図４より、ｙ＝4/13 のとき、ｗは最小3/13 になる。

図3

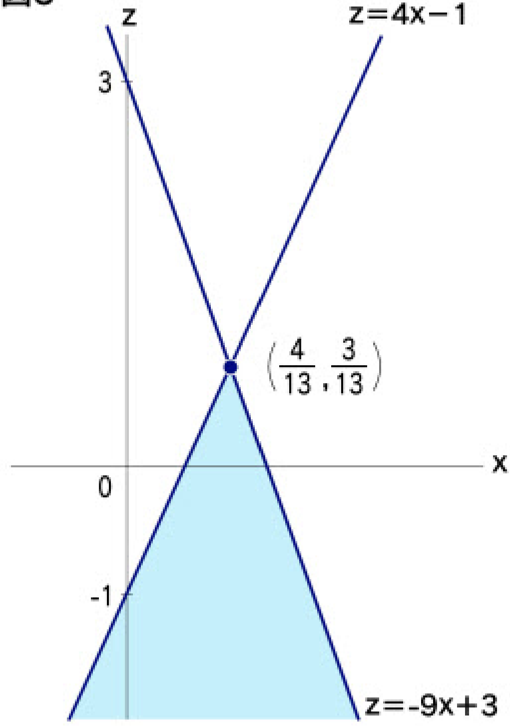
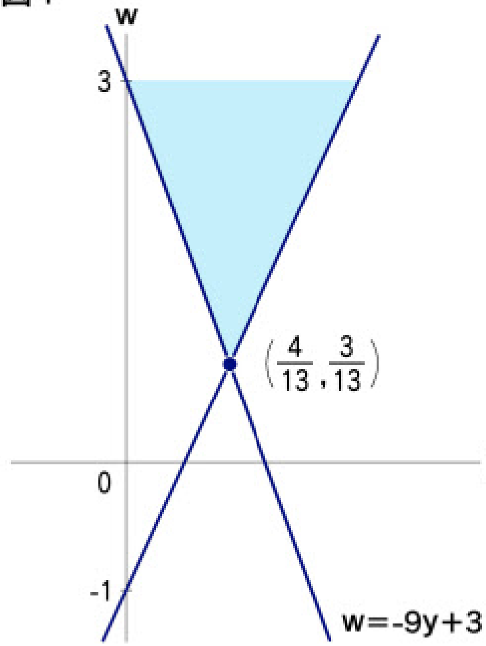


図4



上で注目したいのは、期待値 z の最大値と期待値wの最小値が等しいことである。その等しい値が正の数 3/13 になるので、 Xの方が有利といえる。(もし負の数になっていたら、 YからXへ負の数を与えることになり、 Yが有利となる)。

上で述べたことを一般化させたものに、「ゲーム理論のミニマックス定理」というものがあり、上で z の最大値とwの最小値が等しいことと同じ性質が、この定理で成り立つ。ミニマックスとは、最も悪い(マックス)事態が発生したときの損害が最も小さく(ミニ)なるように判断を下す方法のことである。

ちなみに、その等しい値を決定する図２における(4/13、4/13)のような点が、ゲーム理論の鞍点なのである。両者がそれぞれ最善として選んだ戦略が均衡する点である。

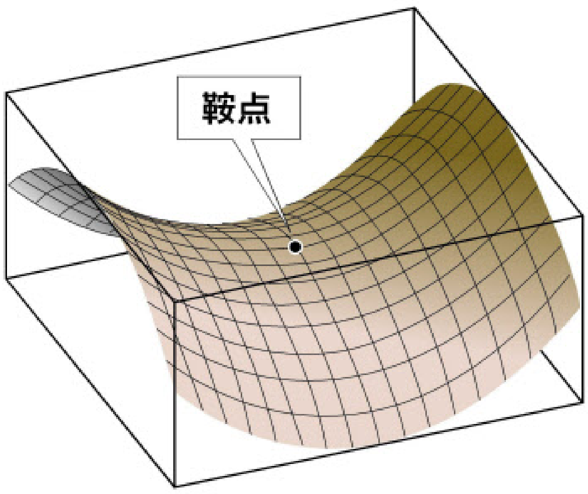


図2