計測と誤差

（データ処理と統計手法）

Ⅳ.　計測とバラツキの原因

4.1　実験における誤差の存在

実験を行いデータを得るまでには、次のような流れがあります。

・ 実験を行う
・ 実験の製品の中からサンプルをとる。
・ サンプルを測定し、データを得る。

このようなとき、通常データにバラツキがでるのが普通です。そのバラツキを**誤差**と呼んでいますが、この誤差には次に示す“測定誤差”、“サンプリング誤差”、“実験誤差”の３つを理解しておくことが大切です。

(1) **測定誤差：同一サンプル**を測ったときの**測定内のデータ間**のバラツキ

(2) **サンプリング誤差：同一の実験**でつくられた製品の中から、抜き取った**サンプル(測定対象物など)間**のバラツキ

(3) **実験誤差：同一条件の組合せで行った実験間**のバラツキ

実験によって得られるデータの品質を管理するための方法論とされる統計的品質管理や実験計画法などに従えば、すべてデータを基本としているので、常にこの３つの誤差、バラツキを認めて、解析できるような知識が必要です。自分の予測していた値と異なった値が得られると、これは実験誤差だ、あるいは測定誤差だとして簡単に処理してしまいますが、実は次のような要素が潜んでいます。以下に、このような誤差に関する性質をあげます。

① 誤　差：目的とする実験(母集団)の真の値とサンプル値(測定データ)との差という要素
② 信頼性：サンプルのデータが信頼おけるかという、つまり何らかのミスやトラブルなどの異常原因がなかったかという要素
③ 精　度：同一サンプルを無限回測定したときのデータのバラツキの幅をいい、幅が小さいほど、精度が良いと判断してしまう要素
④ カタヨリ、正確さ：同一サンプルを無限回測定したときの分布の平均値と真の平均値との差という要素

このように、実験で生じる誤差には様々な要因や原因があるので、まずはこれらの存在を把握し、今後の学習に役立てていただく基礎力を養ってください。そのため今回は概論を学び、個々の項目に深く踏み込みませんが、全体のプロセスや知識を知ることで、次ぎからは、これを頼りにみなさん自身で必要に応じて学習や対応できます。さらにデータ分析をパソコンで処理する場合も、意味を理解してできるようになり、より良い実験や調査、研究を進められます。

4.2　計測精度を定める要素

自然科学や技術の分野で、精度と呼ばれる言葉には、次の 2 つの要素が含まれていることを学習します。

正確度：　その値が「真値」に近い値であることを示す尺度

精度　：　複数回の値の間で互いのばらつきの小ささの尺度
（複数回の測定、もしくは計算の結果も）

実際の測定結果では、正確度は高くても精度が低いこともあれば、逆に精度が高いが正確度が低いこともあります。また、正確かつ高精度な結果を「有効、又は妥当」であるといっています。 例えば、有効なデータだ、とか、妥当なデータである、などです。ここで、この正確度と精度をイメージで表したものが下図となります。

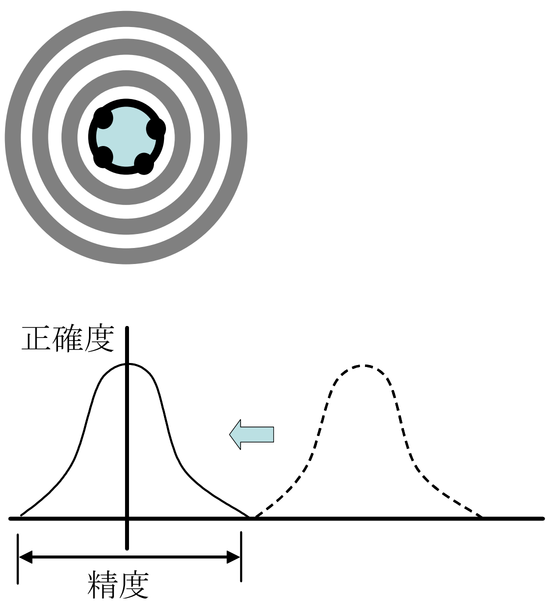


図１　測定結果の正確度は高くても精度が低い場合

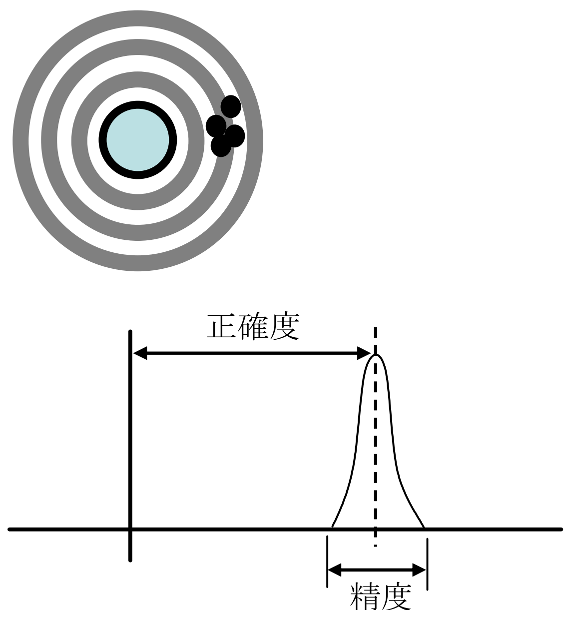


図２　精度が高いが正確度が低い場合

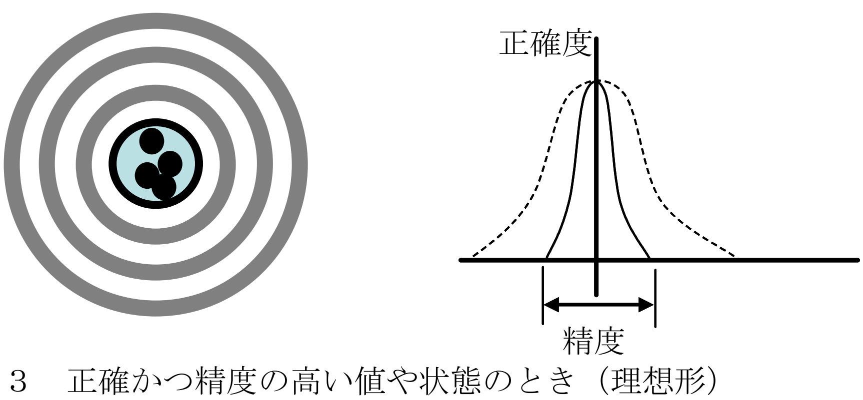


図３　正確かつ精度の高い値や状態のとき（理想形）

4.3　計測法（直読と推読）

１）　直読

目盛りを最小単位までで読むことを直読といいます。日常生活においては、普通の読み方であり、1mm 単位で目盛りが刻まれたプラスチック定規で鉛筆の長さを測るような場合，下図の場合は、148mm と読むのが普通です。

２）　推読

最小目盛り以下まで“だいたい”で読むことを推読といいます。JIS 規格に従えば、これは最小目盛りの 1/10 まで読むことになっており、例の鉛筆の長さを推読すると，148.2mm と読むことができます。
（これを 148.1mm とか 148.3mm などと読んでも間違いではない）

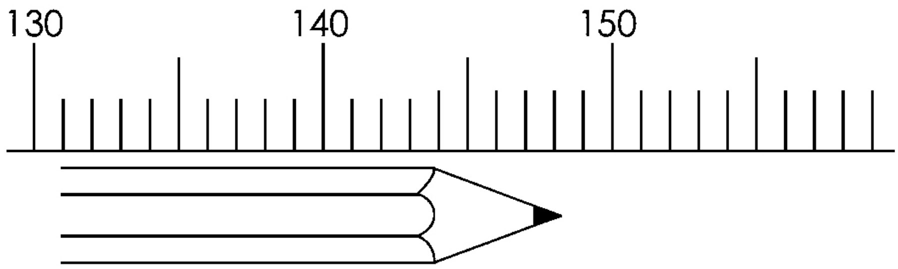


図４　鉛筆の長さ測定の様子

JIS 規格とは
日本工業規格（にほんこうぎょうきかく、Japanese Industrial Standards）は、工業標準化法に基づき、日本工業標準調査会の答申を受けて、主務大臣が制定する工業標準であり、日本の国家標準の一つです。JIS（ジス）または JIS 規格（ジスきかく）と通称されています。

Ⅴ　データと数量化の基礎

5.1　位置とバラツキの表し方

実験の測定値やデータを使って、位置や点を表す方法として、平均値やメジアンを用い、バラツキを表すには標準偏差や範囲を用いる方法があります。

（１）　平均値 $\bar{x}$ （エックスバーと読む）

個々の測定値の合計を測定値の数で割ったものが平均値 $\bar{x}$ です。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\Sigma\, x}{n}$$

ここで　x_1 ：第１番目の測定値

x_2 ：第２番目の測定値

・・・・・・・・・・

x_n ：第ｎ番目の測定値

（ただし、n：サンプルの大きさ）

【例題】５個の品物の寸法が

9.16　　9.25　　9.15　　9.21　　9.20　（mm）

であったとき平均値は

$\bar{x} =$ 　　　　　　　　　　　　　　　　$=$ 　　　(mm)

となります。

平均値は一般には、個々の測定値より１桁下まで求めておきます。

（２）　メジアン（中央値）$\tilde{x}$　（エックスナミガタと読む）

測定値の奇数個の場合、測定値の大きさの順にならべて、ちょうど中央にあたる値をメジアンといいます。また、測定値が偶数個の場合は、中央の二つ値の平均値がメジアンになります。

【奇数個の場合の例題】

9.16　9.25　9.15　9.21　9.20（mm）というデータがあるとき、このデータからメジアンを求めると

大きさの順に並び替え→

したがって、　$\tilde{x}=$　（mm）　となります。

【偶数個の場合の例題】

9.16　9.25　9.15　9.21（mm）という場合のメジアンは、

大きさの順に並び替え→

したがって、$\bar{x}=$　　$=$　（mm）　となります。

（３）　範囲 R　（Range の R を用いる）

１組の測定値のうちの最大値と最小値との差を範囲といいます。標準偏差は計算に手間がかかるため、測定値の数が少ない（n≦10）場合には範囲を使ってバラツキを表すことがしばしば行われます。

x を測定値した時、

R＝（x の最大値）－（x の最小値）

であり、簡単に求められます。

【例題】9.16　9.25　9.15　9.21　9.20（mm）という測定値の範囲 R はいくらか。

回答：　R＝　　＝　（ｍｍ）　となります。

（4） 標準偏差 σ （バラツキぐあいを示す量）

標準偏差を計算するには、次のように**平方和Ｓ**を**自由度**ϕ（＝n－1）で割った不偏分散を求め、この平方根を計算することで求められます。

平方和　$S = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$

(不偏)分散　$V = \dfrac{S}{\phi} = \dfrac{S}{n-1} = \dfrac{(\chi_1 - \bar{\chi})^2 + (\chi_2 - \bar{\chi})^2 + \cdots + (\chi_n - \bar{\chi})^2}{n-1}$

標準偏差　$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - x_n)^2}{n-1}}$

【例題】9.16　9.25　9.15　9.21　9.20（mm）という測定値から標準偏差σを求めなさい。ただし、関数電卓やExcelなどの機能は使わずに、上記の手順で求めること。

$\bar{x} = \qquad\qquad = \qquad = \qquad (mm)$

$\sigma = \sqrt{V}$

$=$

$=$

一言メモ：集団中の**サンプルデータを使い**その集団の標準偏差を推定する場合、つまり母集団が不明の場合ｎ－1が多く用いられます。この場合、標準偏差の記号としてｓが使われる場合があります。
また、有限母集団の場合、**全部のデータを使い**その集団の標準偏差を求める場合は単にｎで割ります。その場合は、ｓは使わずσ(シグマ)という記号の表現になります。この場合、σを標準偏差といい、ｓは不偏標準偏差といいます。しかし、標準偏差の記号も、σが一般的に使われる傾向が多いようです。
また、Ｓは平方和にも使用されるためσを使うことで混乱を避けられます。

～処理後のデータは３つ組で記録しておく～

例えば上記の例題では、

$\bar{x} = 9.194$
$\sigma = 0.0403$
$\mathrm{n} = 5$

その他の組み合わせでは

$\begin{cases} \bar{x} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{n} \end{cases}$ や $\begin{cases} \bar{x} \\ \tilde{x} \\ \mathrm{n} \end{cases}$ など

5.2　桁の求め方

ここではJISに規定される基本的な扱い方に沿って学習します。

１）平均値を求める場合

平均値の桁数は、測定値の測定単位と測定値の個数によって、何桁まで求めるかが、表１のように決められています。

表１　平均値と標準偏差の桁数

測定値の測定単位	測定値の個数		
0.1、1、10 などの単位	—	2～20	21～200
0.2、2、20 などの単位	４未満	4～40	41～400
0.5、5、50 などの単位	10 未満	10～100	101～1001
平均値の桁数	測定値と同じ	測定値より １桁多くする	測定値より ２桁多くする
標準偏差の桁数	有効数字を最大３桁まで出す		

ここで、測定値の測定単位とは、**データの最小のキザミ**のことをいいます。
表２に、その例を示します。

表２　測定値の測定単位とは

測定値の測定単位	得られたデータ
0.1、1、10 などの単位とは	53.4　53.5　53.6　や　40.0　50.0　60.0 など
0.2、2、20 などの単位とは	64.0　66.0　68.0　や　0.04　0.06　0.08 など
0.5、5、50 などの単位とは	0.05　0.10　0.15　や　76.5　77.0　77.5 など

【例題】

1）では、以下のような 10 個のデータが得られた場合について、表 1 を使って平均値を求めてみましょう。

2.55	2.63	2.48	2.50	2.52
2.59	2.50	2.46	2.53	2.50

この場合は、表 1 より

・測定値の測定単位は、0.01　よって「0.1、1、10 などの単位」の部分を見る。

・測定値の個数は　　　10 個　よって「2～20」の所を見る。

従って、問の平均値の桁数は、「測定値よりも 1 桁多く求めればよい」ということになります。実際の計算では

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{10} = \frac{\qquad}{10} =$$

測定値は小数点以下第 2 位の数値であるので、この場合の平均値の桁数は、「測定値より 1 桁多く求める」ことから、

$$\overline{x} =$$

となります。

2）これとは別に、**標準偏差σを求める場合は、有効数字を最大 3 桁まで算出**します。

― 注 意 ―

測定値が存在する範囲を $\overline{x} \pm 3\sigma$ というように推定することがあります。その際、加減算する**桁数が不ぞろい**のときには、**桁数の小さい方に合せて**丸めます。

例えば、$\overline{x} = 52.135$、　$\sigma = 1.48$　の場合は次のようになります。

$$\overline{x} + 3\sigma = 52.135 + 3 \times 1.48 = 52.135 + 4.44 =$$

$$\overline{x} - 3\sigma = 52.135 - 3 \times 1.48 = 52.135 - 4.44 =$$

＜演習１＞

ある化学薬品の主成分Xを測定して、次の測定値を得ました。平均値および標準偏差の桁数は、どこまで算出すればよいか。JIS で定められた方法を使って、途中経過も含めて実際に算出し回答しなさい。（上記で学んだ方法）

81.3	79.1	81.0	78.0	80.5	81.3
82.5	80.8	85.3	81.8	84.0	（%）

（解答）

＜演習２＞

0.2mA きざみの電流計を用いて、ある電子部品の動作電流を測定し、次の測定値が得られました。平均値、標準偏差の桁数は何桁まで算出すればよいか、実際に計算しながら途中経過も含めて回答しなさい。

2.42　2.50　2.58　2.60　2.64　2.56　2.42　(mA)

（解答）

＜演習３＞

0.5 秒きざみのストップウオッチを用いて、ある検査作業について時間測定を行い、次の計測値を得た。同様に、平均値、標準偏差の桁数は何桁まで算出すればよいか、実際に計算しながら途中経過も含めて回答しなさい。

34.5　35.0　33.5　35.0　34.0　38.5　（秒）

（解答）

注意 : 標準偏差など計算途中で桁数を省略(丸め)し過ぎないようにしてください。計算機などを用いる場合は計算途中では有効数字 7 桁ぐらい求めてもかまいません。

5.3　正規分布（ガウス分布）と確率

確率論や統計学で用いられる正規分布とは、平均値の付近に集積するようなデータの分布を表した連続的な変数に関する確率分布となります。この正規分布は平均μと標準偏差σとを指定すれば定まるので、$N(\mu, \sigma)$と略記することができます。また、これを表す正規分布の確率密度関数と累積分布関数は次式で与えられ、図５、６のように示されます。

$$\text{確率密度関数：} f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\chi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{（式 5.3.1）}$$

$$\text{累積分布関数：} F(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{（式 5.3.2）}$$

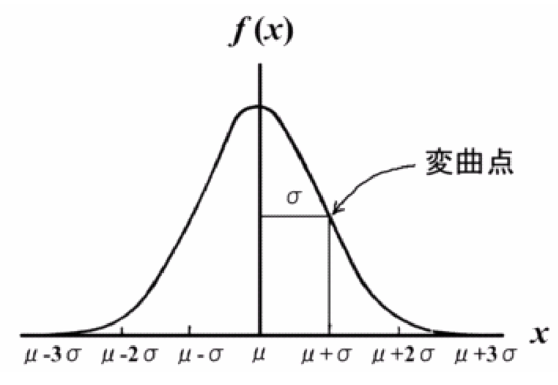


図５　正規分布N（μ，σ）の確率密度関数

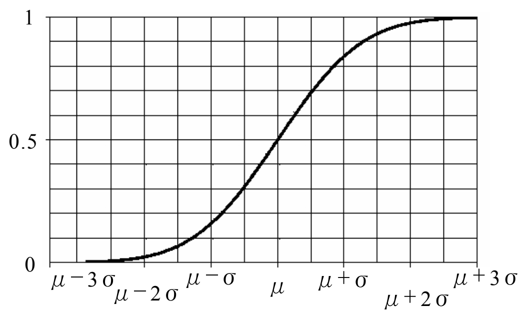


図６　正規分布の累積分布関数

物理量の測定や化学分析の際には、測定器具や材料などの補正可能なカタヨリによる必然的な誤差を除いたとしても、なお、たくさんの偶然的な影響によって誤差が生じるものと考えられます。このような偶然的誤差の分布は正規分布になるといわれています。

また、**カタヨリ**(bias)とは、データもしくは推定量の分布の**中心(中心値)と真の値との差**のことです(前者が大きいとき正となります)。
データの精度を考える場合、標準偏差の計算に気をとられ、盲点となりやすい要素であるので、注意を払うようにしてください。

5.3.1　標準偏差と確率の関係

それでは7ページ(4)の標準偏差に話しを戻します。正規分布と標準偏差との関係を図7に示します。図のように、**ばらつき範囲の確率**は、“平均値μに標準偏差σを±する”ことで簡単に求めることができます。

ある計測値のデータがあった場合、その“平均を中心とするバラツキの分布の全体を示しているのが正規分布”でした。そして、その計測値データから求めた標準偏差は、正規分布の範囲を示しており、**平均値を中心にその範囲に収まる確率を示しています。**

その確率は、平均値をμ、標準偏差をσの正規分布とすると、

「$\mu \pm \sigma$」の区間にデータが入る確率は約68%
「$\mu \pm 2\sigma$」の区間にデータが入る確率は約95%
「$\mu \pm 3\sigma$」の区間にデータが入る確率は約99.7%

となります。**この関係はとても重要なので記憶してください。**

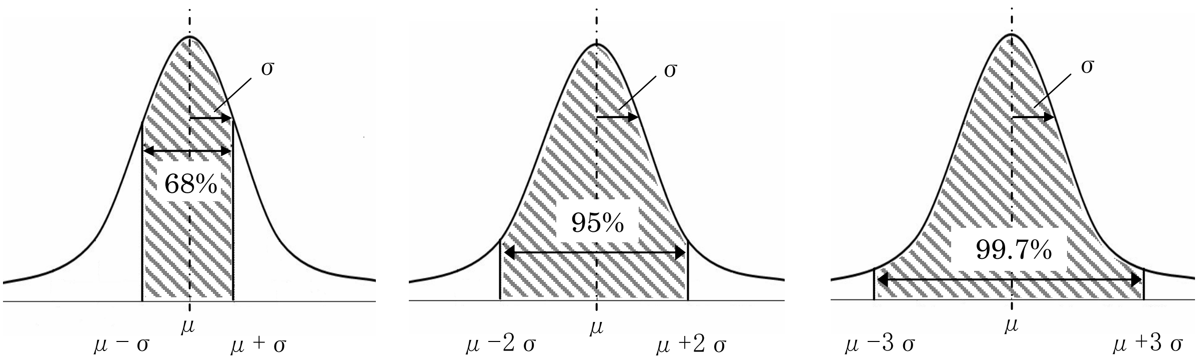


図7　正規分布の累積分布関数

5.3.2　標準正規分布

統計的方法では正規分布に関するいろいろの確率がしばしば必要になってきます。正規分布はμを中心に左右対称で、μ、σの値のいかんにかかわず、ある係数uについて、累積分布関数 F($\mu+u\sigma$)の値は同じです。このとこを利用すれば、平均が 0、**標準偏差が 1 の正規分布** －標準正規分布(standard normal distribution)－ の累積分布の値がわかっていれば、**すべての正規分布について確率を求めることができます**。これから一般の正規分布を標準正規分布に変換して確率を求める方法があります。

一般に正規分布を標準正規分布に変換することを**標準化**するといいます。標準化のための変数変換は、

$$x=\mu+u\sigma \qquad \text{(式 5.3.3)}$$

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \text{(式 5.3.4)}$$

で求められます。

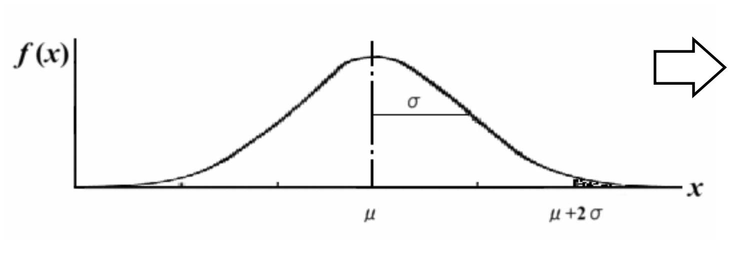
注意： uはμからの偏差をσを単位として測ったものであるから、$\mu=2$ というのは平均から2σ離れているところ示しています。

【例題】

平均$\mu=15$、標準偏差　$\sigma=7$の正規分布で、xの値が 29 より大である確率はいくらか？

例解　　変数変換の式（5.3.4）より

$u=$　　　　$=$



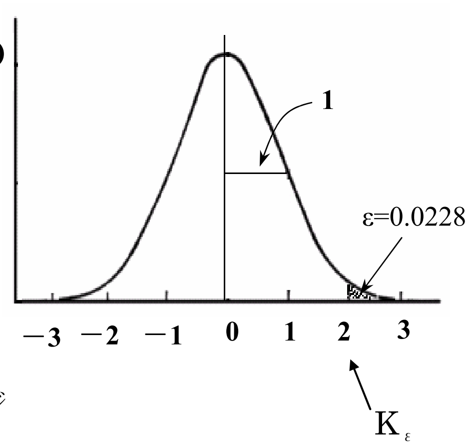


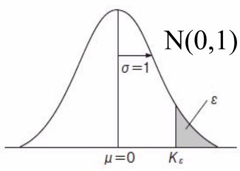
図 8　正規分布の変換イメージ

となるので、標準正規分布表(P11)から、

K_{ε} ＝　　　、ゆえに$\varepsilon=$　　　　となります。

答＿＿＿＿

表３　標準正規分布表（上側確率）　　斜線部を求める表 →



Kε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000

（Zから上側確率を求める。一般に両側検定なので、数値を2倍したものをαとして使用する）

表の読み方例：　K_{ε} ＝1.96 に対する ε は、左の見出しの“1.9”から右に行き、次に、上の見出しから“**６の列**”から下がってきたところを読み、0.0250　と調べる。

Ⅵ　データとデータの検定（分散と母平均）

ここでは２つのデータ群があるとき、双方のデータは、等しいか、否かを確認（検定）する方法を学習します。つまり、同じものとして扱っていいのか、悪いのかを調べるます。ポイントは“分散（バラツキ）”を確認してから、次に“平均値”を確認します。4.2 で学習した精度の話しを思い出してください。

２つのデータ比較

等分散の検定
（バラツキの比較）
【F 検定】

母平均の検定
【t 検定】

F 検定の結果で t 検定の方法は異なるので注意

等分散の場合の検定法
（平均値の比較）
異分散の場合の検定法

6.1　等分散の検定手順（分散の差を検定する）

H：Hypothesis

1）　仮説の設定　H_0：　$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

2）　不偏分散　V_x ，V_y 　を求める。その自由度を ϕ_x ，ϕ_y とする。
ただし、 $\phi_x = n_x - 1$, $\phi_y = n_y - 1$

（↑　n はデータの個数）

3）　分散比を求める。

（← 要するに、分子に大きい方をとり F_0 が１より大きくなるようにする）

$V_x \geqq V_y$ のとき　　$F_0 = \dfrac{V_x}{V_y}$

$\phi_1 = \phi_x$，$\phi_2 = \phi_y$ とする

$V_x < V_y$ のとき　　$F_0 = \dfrac{V_y}{V_x}$

$\phi_1 = \phi_y$，$\phi_2 = \phi_x$ とする

【5%の意味】
5%は 5/100→1/20 より 20 回に 1 回は、間違うかもしれないという意味

4）　判定する。

F 表のグラフの $\dfrac{\alpha}{2}$　　　α

$F_0 \geqq F_{\phi 2}^{\phi 1}(0.025)$ ならば、仮説 H_0 を棄却する。（危険率５%）
（つまり、イコールでない）

例題１　炭素鋼中の炭素の量を調べるのにいくつかの方法があるが、装置の都合でA、Bの二つの方法で実験した。
以下のデータは、同一サンプルをA法で 8 回、B法で 9 回分析して得られたものである。分散に違いがあるといえるか？

A法：0.0358、0.0402、0.0385、0.0345、0.0373、
0.0357、0.0356、0.0364　（%）

B法：0.0364、0.0359、0.0364、0.0359、0.0358、
0.0363、0.0363、0.0362、0.0360　（%）

例題１の検定手順例（解答）

１）　仮説の設定　　H₀：　$\sigma_A^2=\sigma_B^2$

２）　平均　　　$\bar{x}$ ＝0.03675　　　$\bar{y}$ ＝0.03613

　　　平方和　　S_A ＝2380×10^{-8}　　S_B ＝44.0×10^{-8}

　　　不偏分散　V_A ＝340×10^{-8}　　V_B ＝5.50×10^{-8}

　　　自由度　　$\phi_A=7$　　　$\phi_B=8$

３）　V_A ＞ V_B であるから

$$F_0=\frac{V_A}{V_B}=\qquad\qquad=$$

$$\phi_1=\phi_A=\qquad,\quad\phi_2=\phi_B=$$

４）　$F_0=\qquad\geqq F_8^7(\qquad)=$　　　（F 表より）

よって、仮説 H_0 は

別の表現では、

「危険率５％でＡ法とＢ法には分散に違いがある」などと言います。
また、５％で有意差あり、５％有意差あり、５％有意　など、言葉が省略される場合の表現もあります。これらは全て分散に違いがあることを意味します。全体の流れから言葉を判断します。

（有意差：Significant）

一方、検定の結果その反対の検定結果が得られた（等しい）場合は、有意差がない、有意差なし、棄却されない、などの表現が用いられます。

P7 参照

平方和の求め方

$$S=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2$$

分散の求め方

$$V=\frac{S}{\phi}=\frac{S}{n-1}$$

（← n はデータの個数）

水準間
(分子)

ϕ_1

ϕ_2 ↓

水準内
(分母)

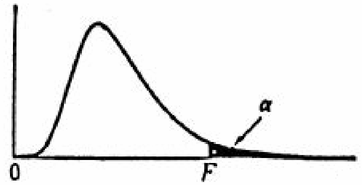
水準：分散分析

F 表 (5%, 1%)(危険率10%, 2%)

$F^{\phi_1}_{\phi_2}(\alpha)$

$$\alpha=\begin{cases}0.05 \cdots \text{細字}\\ 0.01 \cdots \text{太字}\end{cases}$$

$$\alpha=\int_F^{\infty}\frac{\phi_1^{\frac{\phi_1}{2}}\phi_2^{\frac{\phi_2}{2}}X^{\frac{\phi_1}{2}-1}}{\mathrm{B}\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)\left(\phi_1X+\phi_2\right)^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}}dX$$



(自由度 ϕ_1, ϕ_2 から，上側確率 5% および 1% に対する F の値を求める表)(細字は5%，太字は1%)

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1	161· 4052·	200· 5000·	216· 5403·	225· 5625·	230· 5764·	234· 5859·	237· 5928·	239· 5982·	241· 6022·	242· 6056·	244· 6106·	246· 6157·	248· 6209·	249· 6235·	250· 6261·	251· 6287·	252· 6313·	253· 6339·	254· 6366·	1
2	18·5 98·5	19·0 99·0	19·2 99·2	19·2 99·2	19·3 99·3	19·3 99·3	19·4 99·4	19·4 99·4	19·4 99·4	19·4 99·4	19·4 99·4	19·4 99·4	19·4 99·4	19·5 99·5	19·5 99·5	19·5 99·5	19·5 99·5	19·5 99·5	19·5 99·5	2
3	10·1 34·1	9·55 30·8	9·28 29·5	9·12 28·7	9·01 28·2	8·94 27·9	8·89 27·7	8·85 27·5	8·81 27·3	8·79 27·2	8·74 27·1	8·70 26·9	8·66 26·7	8·64 26·6	8·62 26·5	8·59 26·4	8·57 26·3	8·55 26·2	8·53 26·1	3
4	7·71 21·2	6·94 18·0	6·59 16·7	6·39 16·0	6·26 15·5	6·16 15·2	6·09 15·0	6·04 14·8	6·00 14·7	5·96 14·5	5·91 14·4	5·86 14·2	5·80 14·0	5·77 13·9	5·75 13·8	5·72 13·7	5·69 13·7	5·66 13·6	5·63 13·5	4
5	6·61 16·3	5·79 13·3	5·41 12·1	5·19 11·4	5·05 11·0	4·95 10·7	4·88 10·5	4·82 10·3	4·77 10·2	4·74 10·1	4·68 9·89	4·62 9·72	4·56 9·55	4·53 9·47	4·50 9·38	4·46 9·29	4·43 9·20	4·40 9·11	4·36 9·02	5
6	5·99 13·7	5·14 10·9	4·76 9·78	4·53 9·15	4·39 8·75	4·28 8·47	4·21 8·26	4·15 8·10	4·10 7·98	4·06 7·87	4·00 7·72	3·94 7·56	3·87 7·40	3·84 7·31	3·81 7·23	3·77 7·14	3·74 7·06	3·70 6·97	3·67 6·88	6
7	5·59 12·2	4·74 9·55	4·35 8·45	4·12 7·85	3·97 7·46	3·87 7·19	3·79 6·99	3·73 6·84	3·68 6·72	3·64 6·62	3·57 6·47	3·51 6·31	3·44 6·16	3·41 6·07	3·38 5·99	3·34 5·91	3·30 5·82	3·27 5·74	3·23 5·65	7
8	5·32 11·3	4·46 8·65	4·07 7·59	3·84 7·01	3·69 6·63	3·58 6·37	3·50 6·18	3·44 6·03	3·39 5·91	3·35 5·81	3·28 5·67	3·22 5·52	3·15 5·36	3·12 5·28	3·08 5·20	3·04 5·12	3·01 5·03	2·97 4·95	2·93 4·86	8
9	5·12 10·6	4·26 8·02	3·86 6·99	3·63 6·42	3·48 6·06	3·37 5·80	3·29 5·61	3·23 5·47	3·18 5·35	3·14 5·26	3·07 5·11	3·01 4·96	2·94 4·81	2·90 4·73	2·86 4·65	2·83 4·57	2·79 4·48	2·75 4·40	2·71 4·31	9
10	4·96 10·0	4·10 7·56	3·71 6·55	3·48 5·99	3·33 5·64	3·22 5·39	3·14 5·20	3·07 5·06	3·02 4·94	2·98 4·85	2·91 4·71	2·84 4·56	2·77 4·41	2·74 4·33	2·70 4·25	2·66 4·17	2·62 4·08	2·58 4·00	2·54 3·91	10
11	4·84 9·65	3·98 7·21	3·59 6·22	3·36 5·67	3·20 5·32	3·09 5·07	3·01 4·89	2·95 4·74	2·90 4·63	2·85 4·54	2·79 4·40	2·72 4·25	2·65 4·10	2·61 4·02	2·57 3·94	2·53 3·86	2·49 3·78	2·45 3·69	2·40 3·60	11
12	4·75 9·33	3·89 6·93	3·49 5·95	3·26 5·41	3·11 5·06	3·00 4·82	2·91 4·64	2·85 4·50	2·80 4·39	2·75 4·30	2·69 4·16	2·62 4·01	2·54 3·86	2·51 3·78	2·47 3·70	2·43 3·62	2·38 3·54	2·34 3·45	2·30 3·36	12
13	4·67 9·07	3·81 6·70	3·41 5·74	3·18 5·21	3·03 4·86	2·92 4·62	2·83 4·44	2·77 4·30	2·71 4·19	2·67 4·10	2·60 3·96	2·53 3·82	2·46 3·66	2·42 3·59	2·38 3·51	2·34 3·43	2·30 3·34	2·25 3·25	2·21 3·17	13
14	4·60 8·86	3·74 6·51	3·34 5·56	3·11 5·04	2·96 4·70	2·85 4·46	2·76 4·28	2·70 4·14	2·65 4·03	2·60 3·94	2·53 3·80	2·46 3·66	2·39 3·51	2·35 3·43	2·31 3·35	2·27 3·27	2·22 3·18	2·18 3·09	2·13 3·00	14
15	4·54 8·68	3·68 6·36	3·29 5·42	3·06 4·89	2·90 4·56	2·79 4·32	2·71 4·14	2·64 4·00	2·59 3·89	2·54 3·80	2·48 3·67	2·40 3·52	2·33 3·37	2·29 3·29	2·25 3·21	2·20 3·13	2·16 3·05	2·11 2·96	2·07 2·87	15

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_2 \ ϕ_1
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·19	2·15	2·11	2·06	2·01	16
	8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	4·03	3·89	3·78	3·69	3·55	3·41	3·26	3·18	3·10	3·02	2·93	2·84	2·75	
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	2·15	2·10	2·06	2·01	1·96	17
	8·40	6·11	5·18	4·67	4·34	4·10	3·93	3·79	3·68	3·59	3·46	3·31	3·16	3·08	3·00	2·92	2·83	2·75	2·65	
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	2·11	2·06	2·02	1·97	1·92	18
	8·29	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·84	3·71	3·60	3·51	3·37	3·23	3·08	3·00	2·92	2·84	2·75	2·66	2·57	
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	2·07	2·03	1·98	1·93	1·88	19
	6·18	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·77	3·63	3·52	3·43	3·30	3·15	3·00	2·92	2·84	2·76	2·67	2·58	2·49	
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	2·04	1·99	1·95	1·90	1·84	20
	8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·70	3·56	3·46	3·37	3·23	3·09	2·94	2·86	2·78	2·69	2·61	2·52	2·42	
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	2·01	1·96	1·92	1·87	1·81	21
	8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·64	3·51	3·40	3·31	3·17	3·03	2·88	2·80	2·72	2·64	2·55	2·46	2·36	
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·78	22
	7·95	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·59	3·45	3·35	3·26	3·12	2·98	2·83	2·75	2·67	2·58	2·50	2·40	2·31	
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·00	1·96	1·91	1·86	1·81	1·76	23
	7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·54	3·41	3·30	3·21	3·07	2·93	2·78	2·70	2·62	2·54	2·45	2·35	2·26	
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·79	1·73	24
	7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·50	3·36	3·26	3·17	3·03	2·89	2·74	2·66	2·58	2·49	2·40	2·31	2·21	
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·16	2·09	2·01	1·96	1·92	1·87	1·82	1·77	1·71	25
	7·77	5·57	4·68	4·18	3·86	3·63	3·46	3·32	3·22	3·13	2·99	2·85	2·70	2·62	2·54	2·45	2·36	2·27	2·17	
26	4·23	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·39	2·32	2·27	2·22	2·15	2·07	1·99	1·95	1·90	1·85	1·80	1·75	1·69	26
	7·72	5·53	4·64	4·14	3·82	3·59	3·42	3·29	3·18	3·09	2·96	2·82	2·66	2·58	2·50	2·42	2·33	2·23	2·13	
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	2·37	2·31	2·25	2·20	2·13	2·06	1·97	1·93	1·88	1·84	1·79	1·73	1·67	27
	7·68	5·49	4·60	4·11	3·78	3·56	3·39	3·26	3·15	3·06	2·93	2·78	2·63	2·55	2·47	2·38	2·29	2·20	2·10	
28	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·45	2·36	2·29	2·24	2·19	2·12	2·04	1·96	1·91	1·87	1·82	1·77	1·71	1·65	28
	7·64	5·45	4·57	4·07	3·75	3·53	3·36	3·23	3·12	3·03	2·90	2·75	2·60	2·52	2·44	2·35	2·26	2·17	2·06	
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·55	2·43	2·35	2·28	2·22	2·18	2·10	2·03	1·94	1·90	1·85	1·81	1·75	1·70	1·64	29
	7·60	5·42	4·54	4·04	3·73	3·50	3·33	3·20	3·09	3·00	2·87	2·73	2·57	2·49	2·41	2·33	2·23	2·14	2·03	
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·09	2·01	1·93	1·89	1·84	1·79	1·74	1·68	1·62	30
	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·30	3·17	3·07	2·98	2·84	2·70	2·55	2·47	2·39	2·30	2·21	2·11	2·01	
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·00	1·92	1·84	1·79	1·74	1·69	1·64	1·58	1·51	40
	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	3·12	2·99	2·89	2·80	2·66	2·52	2·37	2·29	2·20	2·11	2·02	1·92	1·80	
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·92	1·84	1·75	1·70	1·65	1·59	1·53	1·47	1·39	60
	7·08	4·98	4·13	3·65	3·34	3·12	2·95	2·82	2·72	2·63	2·50	2·35	2·20	2·12	2·03	1·94	1·84	1·73	1·60	
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·18	2·09	2·02	1·96	1·91	1·83	1·75	1·66	1·61	1·55	1·50	1·43	1·35	1·25	120
	6·85	4·79	3·95	3·48	3·17	2·96	2·79	2·66	2·56	2·47	2·34	2·19	2·03	1·95	1·86	1·76	1·66	1·53	1·38	
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·46	1·39	1·32	1·22	1·00	∞
	6·63	4·61	3·78	3·32	3·02	2·80	2·64	2·51	2·41	2·32	2·18	2·04	1·88	1·79	1·70	1·59	1·47	1·32	1·00	

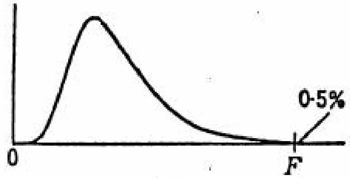
例 1.　自由度 $\phi_1=5$, $\phi_2=10$ の F 分布の（上側）5％の点は 3·33, 1％の点は 5·64 である.

例 2.　自由度 (5, 10)の F 分布の下側 5％の点を求めるには, $\phi_1=10$, $\phi_2=5$ に対して表を読んで4·74を得, その逆数をとって1/4·74とする.

注　自由度の大きいところでの補間は 120/ϕ を用いる 1 次補間による
($\phi>30$)

F 表 (0·5 %)

$F^{\phi_1}_{\phi_2}(0{\cdot}005)$ （自由度 ϕ_1, ϕ_2 の F 分布の上側 0·5% の点を求める表） （危険率1%）



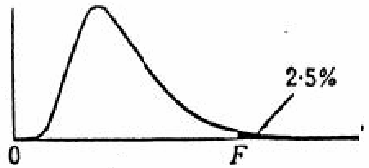
ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1																				1
2	198·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	200·	2
3	55·6	49·8	47·5	46·2	45·4	44·8	44·4	44·1	43·9	43·7	43·4	43·1	42·8	42·6	42·5	42·3	42·1	42·0	41·8	3
4	31·3	26·3	24·3	23·2	22·5	22·0	21·6	21·4	21·1	21·0	20·7	20·4	20·2	20·0	19·9	19·8	19·6	19·5	19·3	4
5	22·8	18·3	16·5	15·6	14·9	14·5	14·2	14·0	13·8	13·6	13·4	13·1	12·9	12·8	12·7	12·5	12·4	12·3	12·1	5
6	18·6	14·5	12·9	12·0	11·5	11·1	10·8	10·6	10·4	10·2	10·0	9·81	9·59	9·47	9·36	9·24	9·12	9·00	8·88	6
7	16·2	12·4	10·9	10·0	9·52	9·16	8·89	8·68	8·51	8·38	8·18	7·97	7·75	7·64	7·53	7·42	7·31	7·19	7·08	7
8	14·7	11·0	9·60	8·81	8·30	7·95	7·69	7·50	7·34	7·21	7·01	6·81	6·61	6·50	6·40	6·29	6·18	6·06	5·95	8
9	13·6	10·1	8·72	7·96	7·47	7·13	6·88	6·69	6·54	6·42	6·23	6·03	5·83	5·73	5·62	5·52	5·41	5·30	5·19	9
10	12·8	9·43	8·08	7·34	6·87	6·54	6·30	6·12	5·97	5·85	5·66	5·47	5·27	5·17	5·07	4·97	4·86	4·75	4·64	10
11	12·2	8·91	7·60	6·88	6·42	6·10	5·86	5·68	5·54	5·42	5·24	5·05	4·86	4·76	4·65	4·55	4·44	4·34	4·23	11
12	11·8	8·51	7·23	6·52	6·07	5·76	5·52	5·35	5·20	5·09	4·91	4·72	4·53	4·43	4·33	4·23	4·12	4·01	3·90	12
13	11·4	8·19	6·93	6·23	5·79	5·48	5·25	5·08	4·94	4·82	4·64	4·46	4·27	4·17	4·07	3·97	3·87	3·76	3·65	13
14	11·1	7·92	6·68	6·00	5·56	5·26	5·03	4·86	4·72	4·60	4·43	4·25	4·06	3·96	3·86	3·76	3·66	3·55	3·44	14
15	10·8	7·70	6·48	5·80	5·37	5·07	4·85	4·67	4·54	4·42	4·25	4·07	3·88	3·79	3·69	3·58	3·48	3·37	3·26	15
16	10·6	7·51	6·30	5·64	5·21	4·91	4·69	4·52	4·38	4·27	4·10	3·92	3·73	3·64	3·54	3·44	3·33	3·22	3·11	16
17	10·4	7·35	6·16	5·50	5·07	4·78	4·56	4·39	4·25	4·14	3·97	3·79	3·61	3·51	3·41	3·31	3·21	3·10	2·98	17
18	10·2	7·21	6·03	5·37	4·96	4·66	4·44	4·28	4·14	4·03	3·86	3·68	3·50	3·40	3·30	3·20	3·10	2·99	2·87	18
19	10·1	7·09	5·92	5·27	4·85	4·56	4·34	4·18	4·04	3·93	3·76	3·59	3·40	3·31	3·21	3·11	3·00	2·89	2·78	19
20	9·94	6·99	5·82	5·17	4·76	4·47	4·26	4·09	3·96	3·85	3·68	3·50	3·32	3·22	3·12	3·02	2·92	2·81	2·69	20
21	9·83	6·89	5·73	5·09	4·68	4·39	4·18	4·01	3·88	3·77	3·60	3·43	3·24	3·15	3·05	2·95	2·84	2·73	2·61	21
22	9·73	6·81	5·65	5·02	4·61	4·32	4·11	3·94	3·81	3·70	3·54	3·36	3·18	3·08	2·98	2·88	2·77	2·66	2·55	22
23	9·63	6·73	5·58	4·95	4·54	4·26	4·05	3·88	3·75	3·64	3·47	3·30	3·12	3·02	2·92	2·82	2·71	2·60	2·48	23
24	9·55	6·66	5·52	4·89	4·49	4·20	3·99	3·83	3·69	3·59	3·42	3·25	3·06	2·97	2·87	2·77	2·66	2·55	2·43	24
25	9·48	6·60	5·46	4·84	4·43	4·15	3·94	3·78	3·64	3·54	3·37	3·20	3·01	2·92	2·82	2·72	2·61	2·50	2·38	25
26	9·41	6·54	5·41	4·79	4·38	4·10	3·89	3·73	3·60	3·49	3·33	3·15	2·97	2·87	2·77	2·67	2·56	2·45	2·33	26
27	9·34	6·49	5·36	4·74	4·34	4·06	3·85	3·69	3·56	3·45	3·28	3·11	2·93	2·83	2·73	2·63	2·52	2·41	2·29	27
28	9·28	6·44	5·32	4·70	4·30	4·02	3·81	3·65	3·52	3·41	3·25	3·07	2·89	2·79	2·69	2·59	2·48	2·37	2·25	28
29	9·23	6·40	5·28	4·66	4·26	3·98	3·77	3·61	3·48	3·38	3·21	3·04	2·86	2·76	2·66	2·56	2·45	2·33	2·21	29
30	9·18	6·35	5·24	4·62	4·23	3·95	3·74	3·58	3·45	3·34	3·18	3·01	2·82	2·73	2·63	2·52	2·42	2·30	2·18	30
40	8·83	6·07	4·98	4·37	3·99	3·71	3·51	3·35	3·22	3·12	2·95	2·78	2·60	2·50	2·40	2·30	2·18	2·06	1·93	40
60	8·49	5·80	4·73	4·14	3·76	3·49	3·29	3·13	3·01	2·90	2·74	2·57	2·39	2·29	2·19	2·08	1·96	1·83	1·69	60
120	8·18	5·54	4·50	3·92	3·55	3·28	3·09	2·93	2·81	2·71	2·54	2·37	2·19	2·09	1·98	1·87	1·75	1·61	1·43	120
∞	7·88	5·30	4·28	3·72	3·35	3·09	2·90	2·74	2·62	2·52	2·36	2·19	2·00	1·90	1·79	1·67	1·53	1·36	1·00	∞
ϕ_2 / ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 \ ϕ_2

例 1. 自由度(5, 10)の F 分布の上側 0·5 %の点は 6·87 である.　例 2. 自由度(5, 10)の F 分布の下側 0·5 %の点は 1/13·6 である.

$F^{\phi_1}_{\phi_2}(0.025)$

F 表 (2.5 %)

(自由度 ϕ_1, ϕ_2 の F 分布の上側 2.5 %の点を求める表)（危険率5%）



ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1	648.	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	963.	969.	977.	985.	993.	997.	1001.	1006.	1010.	1014.	1018.	1
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	2
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9	3
4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26	4
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02	5
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85	6
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14	7
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67	8
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33	9
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	10
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	11
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72	12
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60	13
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49	14
15	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.58	2.52	2.46	2.40	15
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32	16
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25	17
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19	18
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13	19
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09	20
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04	21
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00	22
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97	23
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94	24
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91	25
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88	26
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85	27
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83	28
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81	29
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79	30
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64	40
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48	60
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31	120
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00	∞
ϕ_2 / ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 \ ϕ_2

例 1. 自由度 (5, 10) の F 分布の上側 2.5 %の点は 4.24 である. 例 2. 自由度 (5, 10) の F 分布の下側 2.5 % の点は 1/6.62 である.

6.2　二つの母平均の差の検定手順（σ が未知で、“等分散” の場合（6.1 の方法））

１）　仮説の設定　　H_0：　$\mu_A = \mu_B$　　（二つの母平均は同じ）

２）　平均値 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 、平方和 S_x, S_y 　および自由度を ϕ_x ，ϕ_y を求める

３）　次の式で $\hat{\sigma}$（ハット）を求める。

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S_x + S_y}{\phi_x + \phi_y}}$$

４）　次の式で t_0 を求める。

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right) \cdot \hat{\sigma}}}$$

５）　判定する

$|t_0| \geqq t(\phi_x + \phi_y\ , 0.05)$ ならば、二つの母平均 μ_x と μ_y には差があるといえる。（危険率５％）

危険率：Level of Significance

注１　危険率１％ で検定するときは $t(\phi_x + \phi_y\ , 0.01)$ を用いる。

注２　σ_x と σ_y とが違うかどうかはっきりしない場合は、6.1 の方法で等分散の検定を行う。有意となったときは、次項の「分散の異なる場合」の方法を用いる。

例題２　A 社の市場調査課では、自社の食糧品と市場で競合している B 社の製品との比較をするため、自社（A 社）製品と B 社製品をランダムに抜き取って濃度を測定した。濃度はこの製品の重要な品質特性で、もし A 社の方が低いならば濃度を上げる必要がある。

A 社：　9.1、8.1、9.1、9.0、7.8、9.4、8.2、9.1、8.2、9.3

B 社：　8.2、8.6、7.8、7.6、8.4、8.6、8.0、8.1、8.8、8.0　　（%）

例題２の検定手順例（解答）

まず、バラツキの違いについて情報がないので、最初に分散の違いを検定する。

1） H0： $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$

2） 平均 $\bar{x}_A$＝ 8.73　　$\bar{x}_B$＝ 8.21

平方和 S_A＝ 3.081　　S_B＝ 1.329

不偏分散 V_A＝0.342　　V_B＝0.148

自由度 ϕ_A＝9　　ϕ_B＝9

3） V_A ＞ V_B であるから

$$F_0 = \frac{V_A}{V_B} = \qquad =$$

4）　　であるから仮説は　　。

つまり、$\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ 一応等分散の仮定は成り立つものとして、母平均の差の検定を行う。

次に、**等分散の場合の母平均の差の検定**を行う。

1） H0： $\mu_A = \mu_B$

2） $\bar{x}_A$= 8.73 ， S_A= 3.081

$\bar{x}_B$= 8.21 ， S_B= 1.329

3） $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\qquad}{\qquad}} =$

4） $t_0 = \dfrac{8.73 - 8.21}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}\right) \times 0.495}} =$

5） 判定　（t 表より）

$t_0 > t(18, 0.05) =$　　　であるから、平均に有意差がある。

つまり、（危険率 5%で）平均値に差があることがわかった。

（結論として）

$\bar{x}_A$のほうが大きい値と検定できたので、A 社のほうが濃度が高いことがわかり、従来通りの製造を行うことにする、と判断した。

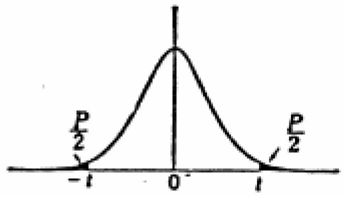
（つまり、コストをかけないで済む判断が客観的にできた、助かったということ）

t 表

$\phi,\ P \to t$

（自由度 ϕ と両側確率 P とから t を求める表）

$$P=2\int_t^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right)dv}{\sqrt{\phi\pi}\,\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)\left(1+\frac{v^2}{\phi}\right)^{\frac{\phi+1}{2}}}$$



ϕ \ P	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·05	0·02	0·01	0·001	P / ϕ
1	1·000	1·376	1·963	3·078	6·314	12·706	31·821	63·657	636·619	1
2	0·816	1·061	1·386	1·886	2·920	4·303	6·965	9·925	31·598	2
3	0·765	0·978	1·250	1·638	2·353	3·182	4·541	5·841	12·941	3
4	0·741	0·941	1·190	1·533	2·132	2·776	3·747	4·604	8·610	4
5	0·727	0·920	1·156	1·476	2·015	2·571	3·365	4·032	6·859	5
6	0·718	0·906	1·134	1·440	1·943	2·447	3·143	3·707	5·959	6
7	0·711	0·896	1·119	1·415	1·895	2·365	2·998	3·499	5·405	7
8	0·706	0·889	1·108	1·397	1·860	2·306	2·896	3·355	5·041	8
9	0·703	0·883	1·100	1·383	1·833	2·262	2·821	3·250	4·781	9
10	0·700	0·879	1·093	1·372	1·812	2·228	2·764	3·169	4·587	10
11	0·697	0·876	1·088	1·363	1·796	2·201	2·718	3·106	4·437	11
12	0·695	0·873	1·083	1·356	1·782	2·179	2·681	3·055	4·318	12
13	0·694	0·870	1·079	1·350	1·771	2·160	2·650	3·012	4·221	13
14	0·692	0·868	1·076	1·345	1·761	2·145	2·624	2·977	4·140	14
15	0·691	0·866	1·074	1·341	1·753	2·131	2·602	2·947	4·073	15
16	0·690	0·865	1·071	1·337	1·746	2·120	2·583	2·921	4·015	16
17	0·689	0·863	1·069	1·333	1·740	2·110	2·567	2·898	3·965	17
18	0·688	0·862	1·067	1·330	1·734	2·101	2·552	2·878	3·922	18
19	0·688	0·861	1·066	1·328	1·729	2·093	2·539	2·861	3·883	19
20	0·687	0·860	1·064	1·325	1·725	2·086	2·528	2·845	3·850	20
21	0·686	0·859	1·063	1·323	1·721	2·080	2·518	2·831	3·819	21
22	0·686	0·858	1·061	1·321	1·717	2·074	2·508	2·819	3·792	22
23	0·685	0·858	1·060	1·319	1·714	2·069	2·500	2·807	3·767	23
24	0·685	0·857	1·059	1·318	1·711	2·064	2·492	2·797	3·745	24
25	0·684	0·856	1·058	1·316	1·708	2·060	2·485	2·787	3·725	25
26	0·684	0·856	1·058	1·315	1·706	2·056	2·479	2·779	3·707	26
27	0·684	0·855	1·057	1·314	1·703	2·052	2·473	2·771	3·690	27
28	0·683	0·855	1·056	1·313	1·701	2·048	2·467	2·763	3·674	28
29	0·683	0·854	1·055	1·311	1·699	2·045	2·462	2·756	3·659	29
30	0·683	0·854	1·055	1·310	1·697	2·042	2·457	2·750	3·646	30
40	0·681	0·851	1·050	1·303	1·684	2·021	2·423	2·704	3·551	40
60	0·679	0·848	1·046	1·296	1·671	2·000	2·390	2·660	3·460	60
120	0·677	0·845	1·041	1·289	1·658	1·980	2·358	2·617	3·373	120
∞	0·674	0·842	1·036	1·282	1·645	1·960	2·326	2·576	3·291	∞

例　$\phi=10$, $P=0{\cdot}05$ に対する t の値は，2·228 である．これは自由度 10 の t 分布に従う確率変数が 2·228 以上の絶対値をもって出現する確率が 5 %であることを示す．

注 1.　$\phi>30$ に対しては $120/\phi$ を用いる 1 次補間が便利である．

注 2.　表から読んだ値を $t(\phi, P)$, $t_P(\phi)$, $t_\phi(P)$ などと記すことがある．

～ コラム　～　正式な四捨五入（数値の丸め方）について

あるデータの丸める桁が、たまたま５が多い場合のときなどは、単純な四捨五入を行うと計算結果はプラス側へ**カタヨリ**を生じてしまうことになり、これを解決するため JIS Z 8401「数値の丸め方」に正しい方法が定められています。

ある数値を、小数点以下 n 桁の数値に丸める場合について、(n+1) 桁目以下の数値を、以下のように整理します。	ここでは、少数点２桁に丸める場合についての例を示します。
方法	**例**
①丸める桁の数値（n+1 桁目のこと）を**四捨六入**（0～4 は切り捨てて、6～9 は切り上げ）します。	3.264→3.26 （少数点以下 3 桁目の 4 は切り捨て） 3.267→3.27 （少数点以下 3 桁目の 7 は切り上げ）
②丸める桁の数値（n+1 桁目のこと）がまさしく 5 の時、またはこの 5 が切り捨てられたものか、切り上げて得られたものかがわからない場合は、次のように処理します。 **n 桁目の数値が** **(a)0 または偶数なら切捨てます** **(b)奇数ならば切り上げます**	3.205→3.20 （小数点以下 2 桁目が 0 より切り捨て） 3.265→3.26　（少数点以下 2 桁目が 6(**偶数**)なので切り捨て） 3.275→3.28　（少数点以下 2 桁目が 7(**奇数**)なので切り上げ）
③丸める桁の数値（n+1 桁目のこと）が 5 であっても、**5 のあとに数値がある場合**は、切り上げます。	3.2651→3.27 や 3.2659→3.27 (小数点以下 4 桁目に 1 や 9 があるため)
④丸める桁の数値（n+1 桁目のこと）が **5 であっても、これが切り捨てられたもの**であれば、(n+1)桁目を**切り上げ**ます。 また、**切り上げて得られたもの**であれば、(n+1)桁目を**切り捨て**ます。	3.265(が 3.2647 を切り上げて得られた値の場合)→3.26　同様に、 3.275(が 3.2748 を切り上げて得られた値の場合)→3.27 3.265(が 3.2652 を切り捨てて得られている場合)→3.27 3.275(が 3.2751 を切り捨てて得られている場合)→3.28

注１、現場のデータを扱う場合はあまり気にせず、実用的な四捨五入で十分。

注２、少数で無い数値の場合も同様。例えば、次の数値を有効数字 2 桁で丸める場合、6049→6000 となり、6075→6100 となります。

注３、丸め方は 1 段階で行わなければなりません。例えば、5.346 を有効数字 2 桁で丸めれば、5.3 となります。
これを 2 段階にわけて、5.346→5.35→5.4　としてはいけません。

6.3　二つの母平均の差の検定手順（σが未知で、“異分散”の場合）

(6.1 の方法で分散に差があるとき)

１）　仮説の設定　　H_0：　$\mu_x = \mu_y$　　（二つの母平均は同じ）

２）　平均値 $\bar{x}$, $\bar{y}$　、平方和 S_x, S_y　および自由度を ϕ_x　,　ϕ_y を求める。

３）　次へ（6.2 のこの部分は省略）

４）　次の式で t_0 を求める。

（バラツキがはっきりしていたり、等分散の検定で有意となった（分散の差がある）場合には次式を用いる）

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{V_x}{n_x} + \dfrac{V_y}{n_y}}}$$

を用いて t 検定を行えばよい。このときの自由度 ϕ は次式から定める。

$$\frac{1}{\phi} = \frac{c^2}{\phi_x} + \frac{(1-c)^2}{\phi_y} \qquad \text{ここで} \quad c = \frac{V_x}{n_x} \Big/ \left(\frac{V_x}{n_x} + \frac{V_y}{n_y} \right)$$

５）　判定する。

$|t_0| \geqq t(\phi, 0.05)$ ならば、二つの母平均 μ_x と μ_y には差があるといえる。

（危険率５％）

注１　危険率１％ で検定するときは $t(\phi\ ,\ 0.01)$ を用いる。

注２　σ_x と σ_y とが違うかどうかはっきりしない場合、6.1 の方法で等分散の検定を行う。有意でなかったとき（等分散のとき）は、前項の「分散が等しい場合」の方法を用いる。

例題３　従来の成分分析の方法(A)を簡易分析法(B)に切り替えることを検討している。簡易法は精度が悪いことはわかっているが、分析回数を多くして推定の精度を必要なだけあげることを考えている。しかし、推定値にカタヨリがあると困るので平均に差があるかどうかを検討することになった。従来の A 法で５回、新簡易法の B 法で 10 回分析して、次の結果が得られた。

A 法：　45.16、45.15、45.14、45.20、45.12

B 法：　45.30、45.19、45.28、45.25、45.40、
45.39、45.11、45.31、45.20、45.42

さて、この２つの方法の母平均に差があると言えるか？

例題３の検定の手順例（解答）

等分散の検定

平均　$\bar{x}_A = 45.154$　　$\bar{x}_B = 45.285$

平方和　$S_A = 0.00352$　　$S_B = 0.09145$

不偏分散　$V_A = \dfrac{0.00352}{4} = 0.00088$　　$V_B = \dfrac{0.09145}{9} = 0.01016$

自由度　$\phi_A = 4$　、　$\phi_B = 9$

$V_B > V_A$ であるから

$$F_0 = \frac{V_B}{V_A} = \frac{0.01016}{0.00088} = 11.55$$

F 表を参照

$F_0 \geqq F_4^9(0.025) = 8.90$　であるから、分散が違うことが確認できた。

平均の差の検定

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\dfrac{V_A}{n_A} + \dfrac{V_B}{n_B}}} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\dfrac{V_A}{5} + \dfrac{V_B}{10}}} = \frac{45.154 - 45.285}{\sqrt{\dfrac{0.00088}{5} + \dfrac{0.01016}{10}}} = \frac{-0.131}{0.0345} = -3.80$$

$$c = \frac{V_A}{5} \Big/ \left(\frac{V_A}{5} + \frac{V_B}{10}\right) = \frac{0.00088}{5} \Big/ \left(\frac{0.00088}{5} + \frac{0.01016}{10}\right) = 0.148$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{0.148^2}{4} + \frac{(1-0.148)^2}{9} = 0.0862$$

$\phi = \dfrac{1}{0.0862} = 11.6$（←これが自由度）

$t(11.6\ ,\ 0.05) = 2.188$　（t 表より）

$t(11.6\ ,\ 0.05)$ の探し方と値の求め方

$t(11\ ,\ 0.05) = 2.201$

$t(12\ ,\ 0.05) = 2.179$

両者の差分

$t(11.6\ ,\ 0.05)$
$= 2.201 - (0.022 \times 0.6)$
$= 2.1878$
$\fallingdotseq 2.188$

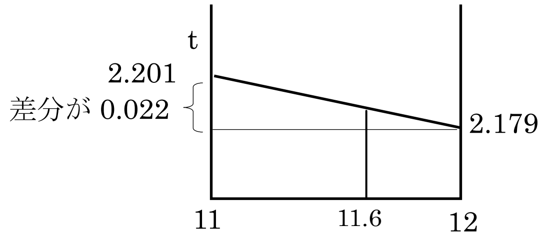
$|t_0| > t(11.6\ ,\ 0.05)$ であるから平均の差は有意である。（危険率５％）

（つまり、差がある）

（結論として）

平均値に差があるので、簡易法を用いるためには、平均値のカタヨリを補正する方法をさらに検討することにした。

補間法について（自由度 ϕ が表にない桁の値を読む場合の一次補間法）



差分 0.022×0.6 で補間的に求める

Ⅸ　課 題

問１　統計処理について次の問に答えなさい．回答はレポート用紙にすること。

(1) 目盛りの付いた測定器具を用いた場合，目盛りのどこまで読むか答えなさい。

(2) 目盛りの範囲で測定値を読むことを何と言うか答えなさい。
　また，最小目盛り以下をだいたいで読むことを何と言うか答えなさい。

(3) 正確度と、精度とは何か，それぞれ答えなさい。

(4) 測定値や実験値はいつも一定になるとは限らない。
そこで，数値の扱い方として，測定値を並べてその中央になる $\boxed{①\quad}$ や，最大と最小値の差で表す $\boxed{②\quad}$ や，測定値の合計をその数で割った $\boxed{③\quad}$ などがある。
また，測定値のばらつき具合を数値で表す $\boxed{④\quad}$ は統計学上，重要である。
これは不偏分散を求め，これの平方根から計算する。

(5) ある計測を行った。
５１m，５０m，５３m，４９m，４７mの測定値が得られたときの
中心値 $\tilde{x}$，範囲 R，平均値 $\bar{x}$ を答えなさい。

(6) 不偏分散 V を求める式を解答欄に書きなさい。（ただし、n-1 の計算式）

(7) 標準偏差 σ を求める式を解答欄に書きなさい。（ただし、n-1 の計算式）

(8) 平均値 $\bar{x}$ に，求めた標準偏差 σ を足し引き（±（ﾌﾟﾗｽﾏｲﾅｽ））した値の範囲は，何パーセントの確率となるか答えなさい。（何パーセントと答える）

(9) 統計計算で求められた範囲が９５％で起こる確率にする場合は，
標準偏差 σ の何倍を平均値に足し引き（±）すればよいか答えなさい。

問２　　Ａさんが試験管内の水溶液の高さを調べた。この調べで、６本の試験管内の水溶液の高さは，各々99㎜，100㎜，102㎜，101㎜，98㎜，100㎜であった．次の手順に沿ってこの測定値の平均値と標準偏差を求め，この高さのバラツキ範囲を確率的に、母集団が不明の場合で解析しなさい。

回答は下記の手順に沿って行い、レポート用紙に計算過程を記入すると共に，その解析結果を下記の解答欄と同じような形態で回答すること。

（ヒント：計算過程）

手順１，平均値を求める。

手順２，次に，不偏分散，標準偏差を求める。ただし，$\sqrt{2}=1.41$　とする。

手順３，求まった標準偏差を平均値にプラスマイナスした範囲を求める。

回答すべき項目

データ数ｎ は，　＿＿＿＿＿＿　個
平均高さ $\bar{x}$　は，　＿＿＿＿＿＿　[mm]
標準偏差ｓ　は，　＿＿＿＿＿＿

また，A さんは、ばらつきの 68%確率の範囲と，95%確率の範囲を各々統計解析した。次の計測結果を言葉でまとめ、欄内のように記載し回答しなさい。（下線部に適語記入する形式で）

計測実験のまとめの回答項目

A さんの測定では，平均　＿＿＿＿＿＿mm の高さであり，そのばらつきの範囲は、
＿＿＿＿＿＿mm　から＿＿＿＿＿＿mm の範囲は，６８％の確率であり，
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿は，９５％の確率となる．